۱۳۸۹

خلاصه درس تحقیق در عملیات ۱

بر اساس جزوه کلاسی و کتاب استاد زاهدی سرشت

مقدمه:

تمامی مطالب این مجموعه برگرفته از نکات کلاسی استاد زاهدی سرشت، کتاب تحقیق در عملیات همان استاد و نکات تکمیلی از کتابهای تحقیق در عملیات استاد اشجری و مبانی تحقیق در عملیات محسن عبادی، میثم ربیعی و مصطفی مزینانی و سوالات کنکور سراسری می باشد.

این مجموعه به منظور دوره نهایی دانشجویان، در روزهای پایانی کنکور فراهم شده است. لذا هیچ متد یادگیری در آن گنجانده نشده است و تنها برای اشخاصی مناسب است که می خواهند درس تحقیق در عملیات را مرور نمایند.

نکاتی که در این خلاصه آمده است، به سلیقه گردآورنده، غربال شده اند و پس از حذف نکات ساده، با گنجاندن نکاتی که در تستها بیشتر تکرار شده و جای شبهه بسیار دارد، بدین شکل درآمده است. این خلاصه نکات جای کار بیشتری دارد و در آینده و پس از گنجاندن مباحث تحقیق در عملیات ۲ تکمیل تر خواهند شد.

هادی جهانشاهی
بهمن ماه ۸۹

دپارتمان تخصصی مهندسی صنایع
iedep.com

Iedep.com
دپارتمان تخصصی مهندسی صنایع بینش
1389



فرض های برنامه ریزی خطی:

۱. **فرض تناسب:** چنانچه متغیری صفر شود، متغیر دیگر هم حتما صفر خواهد شد یا به عبارت دیگر عدد ثابت و هزینه اولیه نداریم. (تخفیف، پاداش(صرفه جویی) و پس انداز(هزینه اولیه) نداریم.)

※ در مسائل دارای هزینه اولیه، مساله را می توان به برنامه ریزی خطی عدد صحیح تبدیل نمود.

۲. **فرض جمع پذیری:** ۱ لیتر آب ۹۰ درجه با ۱ لیتر آب ۱۰ درجه جمع پذیر خطی نیستند.

※ تناسب + جمع پذیری = فرض های خطی (استقلال متغیرها)

۳. **فرض بخش پذیری:** x نباید **integer** باشد یا عضو مجموعه ای ناپیوسته باشد.

※ در شرایط عدم وجود بخش پذیری، مساله به برنامه ریزی خطی تبدیل می شود.

۴. **فرض قطعیت:** عنصر احتمالی، اعم از هزینه، قیمت و ضرایب و .... نداریم.

※ نامقید بودن در تضاد با خطی بودن نیست.

※ **محدودیت** یک فاکتور بحرانی است و محاسبات را افزایش می دهد، نه تعداد متغیرها.

※ شدنی بودن = وجود حداقل یک نقطه صدق شونده.

تبدیل در شرایط مختلف به برنامه ریزی خطی:

※ در تبدیل قدر مطلق به برنامه ریزی خطی به دو حالت زیر می بایست توجه نمود:

$$|x_i| = \begin{cases} x_i' + x_i'' & \text{در تابع هدف} \\ x_i' - x_i'' & \text{محدودیت ها} \end{cases} \qquad x_i', x_i'' \geq 0$$

※ تنها محدودیت قدر مطلق کوچکتر مساوی قابل تبدیل به برنامه ریزی خطی است. قدرمطلق بزرگتر مساوی به برنامه ریزی عدد صحیح تبدیل می شود.

$$|x_i + x_j| \leq b \Rightarrow \begin{cases} x_i + x_j \leq b \\ x_i + x_j \geq -b \end{cases}$$

$$|x_i + x_j| \geq b \Rightarrow \left.\begin{cases} x_i + x_j \geq b \\ \text{or} \\ x_i + x_j \leq -b \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \text{ILP}$$

※ m معادله و n مجهول ⟵ قابل تبدیل به ⟵ حداقل $m+1$ و حداکثر $2m$ نامعادله است.

※ تبدیل متغیر آزاد در علامت:

$$\text{آزاد در علامت}: x_i = x_i' - x_i'' \quad x_i', x_i'' \geq 0 \quad x_i' \times x_i'' = 0$$

※ اگر یک مساله برنامه ریزی خطی، در فرم استاندارد یا متعارفی، یک جواب بهینه متناهی داشته باشند، آنگاه دارای جواب بهینه گوشه ای است.

قضیه اساسی برنامه ریزی خطی:

هر مساله برنامه ریزی خطی یا جواب موجه ندارد یا نامحدود است و یا دارای جواب بهینه محدود است.

گردآورنده: هادی جهانشاهی

* اگر در تابع هدف Maxi min قدرمطلق وجود داشته باشد، قابل تبدیل به مساله برنامه ریزی خطی نمی باشد و تنها عدد صحیح خواهد شد. اگر در تابع هدف Mini max قدر مطلق وجود داشته باشد می تواند تبدیل به فرم خطی شود.

$$\underbrace{MaxZ=Min\{|x_i+x_j|, x_i-x_j\}}_{\Downarrow}$$

$$MaxZ=y$$

$$\left.\begin{array}{l}|x_i+x_j|\ge y\\ x_i-x_j\ge y\end{array}\right\}\xrightarrow{ILP}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_i+x_j\ge y\\ \quad or\\ x_i+x_j\le -y\end{array}\right.\\ x_i-x_j\ge y\end{array}\right.$$

$$\underbrace{MinZ=Max\{|x_i+x_j|, x_i-x_j\}}_{\Downarrow}$$

$$MinZ=y$$

$$\left.\begin{array}{l}|x_i+x_j|\le y\\ x_i-x_j\le y\end{array}\right\}\xrightarrow{LP}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_i+x_j\le y\\ x_i+x_j\ge -y\end{array}\right.\\ x_i-x_j\le y\end{array}\right.$$

---

* زاویه بین بردار گرادیان C در نقطه بهینه و قیود در حالت Max حاده ($C.A>0$)، و در نقطه بهینه و حالت Min منفرجه است ($C.A<0$).
* در رسم بردار گرادیان، در نقاط گوشه ای، بردار گرادیان عمود بر محدودیتها را به سمت خارج از منطقه موجه رسم می نماییم.
* بعد فضای شدنی به تعداد **متغیرها** و بعد فضای ایجاب به تعداد **محدودیتها** وابسته است.

جبر خطی:

ترکیب آفین:

$$\sum\lambda_i=1 \qquad v=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_m u_m$$

ترکیب محدب:

$$\sum\lambda_i=1 \qquad v=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_m u_m$$

$$\lambda_i\ge 0$$

جهت دورشونده:

$$x=\{x\mid Ax\le b, x\ge 0\}\Rightarrow D=\{d\mid Ad\le 0, d\ge 0, d\ne 0\}$$

* زمانی جهت شدنی ست که تست Min صفر شود.
* بعدهای مساله را غیر پایه ای ها می سازند.

سیمپلکس و تعبیر هندسی:

* حداکثر تعداد متغیرهای به طور اکید مثبت هر جواب پایه ای شدنی **m** است. $(A = m \times n)$

* حداکثر مولفه های صفر در هر نقطه ی گوشه ای شدنی حداقل **n** است. $(A = m \times n)$

* در عدم تباهیدگی هر نقطه گوشه ای به تعداد بعد فضا نقطه گوشه ای مجاور دارد.

* نقطه راسی می تواند بهینه باشد اما جدول سیمپلکس هنوز شرایط بهینگی را نداشته باشد.

* نقطه درونی در حالت کلی نمی تواند بهینه باشد، اما با شرایطی می تواند بهینه نیز باشد. (تابع هدف ثابت باشد)

* اگر دو نقطه گوشه ای غیرمجاور بهینه باشند، آنگاه تابع هدف مساله ثابت است.

* اگر در بهینگی مقدار تابع هدف متناهی شود، x^* (مقدار بهینه متغیرهای تصمیم) می تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

* می توان نقطه بهینه داشت اما نقطه بهینه گوشه ای نداشت. (مثلا یک خط بهینه جواب مساله باشد. یا در حالتهای خاصی از مساله هایی که متغیر نامقید یا قید اکید دارند.)

* می توان منطقه کراندار داشت، اما جواب بهینه نداشت.

*

تعداد جواب های پایه ای مجاور در هر **BFS** $\le$ $\underbrace{(\text{تعداد متغیرهای غیر پایه ای})}_{(n-m)}$ $\underbrace{(\text{تعداد متغیرهای پایه ای})}_{m}$

منطقه موجه نامحدود:

- در مساله $x \ge 0$, $Ax \ge b$، در صورتی که یک متغیر در تمامی محدودیتها ضریب **نامنفی** داشته باشد، فضای مساله در جهت آن متغیر بیکران است.
- در مساله $x \ge 0$, $Ax \le b$، در صورتی که یک متغیر در تمامی محدودیتها ضریب **نامثبت** داشته باشد، فضای مساله در جهت آن متغیر بیکران است.

* حداکثر تعداد جواب پایه ای و پایه ای شدنی $\binom{n}{m}$ است. $(A = m \times n)$

* بین نقاط راسی و جواب پایه ای شدنی تناظر برقرار است.

* **نقطه راسی تباهیده** حداقل یک پایه دارد و بیش از یک پایه دارد اگر متغیری نداشته باشیم که در همه جای مساله صفر است. (متغیر خنثی و بی اثر)

* مقدار متغیر وارد شونده در جدول بعد، برابر تست **Min** است.

* تست **Min** دو چیز را تضمین می کند:
  - شدنی بودن جدول بعد ← منفی نشدن **RHS**
  - حفظ استقلال بردارهای پایه جدول بعد

* **محدودیت فعال (الزام آور):** محدودیت موثری که نطقه بهینه بر روی معادلات حدی آن قرار دارد.

حذف محدودیت غیر الزام آور، فضای شدنی را می تواند تغییر دهد، اما مقدار جواب بهینه را تغییر نمی دهد.

* مساله **برنامه ریزی خطی آزاد شده:** به مسائلی اطلاق می شود که متغیرها بتوانند مقادیر غیر صحیح اختیار نمایند.

***حالات خاص جواب بهینه:**

۱. **نامتناهی:** وارد شونده √ خارج شونده ×
۲. **چندگانه:** صفر شدن ضریب سطر **Z** غیر پایه ای در بهینگی

- **توجه:** شعاع بهینه = چندگانه بودن و انجام نشدن تست **Min**

* شرط **لازم(و نه کافی)** برای وقوع جواب بهینه چندگان در فضای دوبعدی توازی تابع هدف با یکی از محدودیتهاست. برای بیش از دو بعد لزوما نیازی به توازی نیست.

۳. **تباهیدگی**: تست Min یکتا نباشد ⇐ تباهیدگی در جدول بعد.

- **توجه**: متغیری که از پایه خارج نمی شود در جدول بعد صفر می شود.

i. **رفع شدنی**: در جدول تبهگن اگر عنصر لولای روبروی مقدار صفر کوچکتر مساوی صفر باشد، تباهیدگی رفع می شود.

ii. **رفع ناشدنی**: اگر در جدول تبهگن، مقدار عنصر لولا مثبت باشد و **RHS** صفر باشد، پس تست **Min** هم صفر شده و تباهیدگی پابرجا می ماند.

iii. اگر عنصر لولا صفر باشد، از نقطه تباهیده خارج می شویم و به نقطه راسی مجاورش می رسیم که آن هم تباهیده است.

* هیچ ارتباطی میان قید زائد و تبهگنی وجود ندارد.

* در فضای **دوبعدی** اگر بیش از **دو** معادله از نقطه گوشه ای بهینه عبور کند، مساله دارای تبهگنی دائم(رفع نشدنی)، و اگر از نقطه گوشه ای غیربهینه عبور نماید دارای تباهیدگی موقت(رفع شدنی) است.

* در صورتی که بردار **b** با یکی از بردارهای ستونی ماتریس **A** هم راستا و هم جهت باشد، مساله تباهیده است.

۴. **جواب بهینه کل سطح**: این حالت زمانی رخ می دهد که تابع هدف ثابت باشد یا ضرایب تابع هدف تمام صفر باشند.

سیمپلکس متغیرهای کراندار:

در اینجا تعداد جوابهای پایه ای شدنی دستگاه حداکثر $\binom{n}{m}2^{n-m}$ می باشد. زیرا $n-m$ متغیر غیرپایه ای خواهیم داشت که هر کدام می توانند در کران بالا یا پایین خود قرار گیرند و در مجموع 2^{n-m} حالت را ایجاد می کند. از طرفی از بین n متغیر مساله می بایست m متغیر را به عنوان متغیر پایه ای انتخاب نمود.($\binom{n}{m}$)

* اگر $l_B \le x_B \le u_B$ پایه تباهیده و اگر $l_B < x_B < u_B$ ناتباهیده است.

حالت اول: متغیر وارد شونده در کران پایین باشد. میزان افزایش آن پس ورود به پایه برابر Δ است.

$$\Delta = Min\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}\begin{cases}\theta_1 = \begin{cases} Min\left\{\left|\dfrac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{Y_i}\right|\right\} & Y_i > 0 \\ \infty & Y_i \le 0\end{cases} & \Rightarrow \text{متغیر خارج شونده به کران پایین می رود.} \\ \theta_2 = \begin{cases} Min\left\{\left|\dfrac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{Y_i}\right|\right\} & Y_i < 0 \\ \infty & Y_i \ge 0\end{cases} & \Rightarrow \text{متغیر خارج شونده به کران بالا می رود.} \\ \theta_3 = u_{Bi} - l_{Bi} \end{cases}$$

حالت دوم: متغیر وارد شونده در کران بالا باشد. میزان کاهش آن پس ورود به پایه برابر Δ است.

$$\Delta = Min\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}\begin{cases}\theta_1 = \begin{cases} Min\left\{\left|\dfrac{\bar{b}_i - l_{Bi}}{Y_i}\right|\right\} & Y_i < 0 \\ \infty & Y_i \ge 0\end{cases} & \Rightarrow \text{متغیر خارج شونده به کران پایین می رود.} \\ \theta_2 = \begin{cases} Min\left\{\left|\dfrac{u_{Bi} - \bar{b}_i}{Y_i}\right|\right\} & Y_i > 0 \\ \infty & Y_i \le 0\end{cases} & \Rightarrow \text{متغیر خارج شونده به کران بالا می رود.} \\ \theta_3 = u_{Bi} - l_{Bi} \end{cases}$$

❋ اگر Δ بینهایت شود، مساله دارای جواب نامتناهی است.

❋ در تست مینمم متغیرهای کراندار، هم از عناصر مثبت و هم از عناصر منفی ستون لولا استفاده می شود.

❋ شرط بهینگی = ضریب سطر Z متغیرهایی که در کران پایین هستند در مساله $\left\{\begin{matrix}Max\\Min\end{matrix}\right.$ مقدار $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right.$ داشته باشند و آنهایی که در کران بالا هستند، در $\left\{\begin{matrix}Max\\Min\end{matrix}\right.$ مقدار $\left\{\begin{matrix}-\\+\end{matrix}\right.$ داشته باشند.

لم فارکس:

یکی و تنها یکی از این دو دستگاه جواب دارد: $\begin{cases}1)\ Ax \geq 0 \quad , \quad Cx < 0 \quad , \quad x: Free \\ 2)\ wA = C \quad , \quad w \geq 0\end{cases}$

در آن A یک ماتریس $m \times n$ و C یک بردار n مولفه ای است.

متغیر مصنوعی (روش دوفازی):

❋ برای تبدیل به فرم استاندارد به هیچ **متغیر مصنوعی** نیاز نیست. متغیر مصنوعی فقط برای راه اندازی **Simplex** است.

❋ در **روش دوفازی**، در انتهای فاز I همواره $r^* \geq 0$ است و هیچ گاه جواب نامتنهای نداریم.

❋ اگر ناحیه شدنی مساله بیش از یک نقطه باشد، مساله فاز I همواره دارای جواب بهینه چندگانه است و هر نقطه شدنی منطقه موجه یک جواب بهینه فاز I است.

❋ برای نوشتن جدول معادل فاز I برای روش M کافی است فقط در سطر Z **بزرگ**، ضرایب M، را نگاه داریم و باقی را حذف کنیم:

$$\frac{2M-1}{3} \xrightarrow{\text{می شود}} \frac{2}{3}$$

❋ برای نوشتن جدول معادل فاز II برای روش M کافی است فقط در سطر Z **بزرگ**، به M، مقدار صفر بدهیم:

$$\frac{2M-1}{3} \xrightarrow{\text{می شود}} \frac{-1}{3}$$

❋ برای بدست آوردن تعداد متغیرهای اصلی مساله، ابتدا متغیرهای آزاد را مقید می کنیم(هر کدام را دو بار می شماریم.)

❋ اگر در پایان فاز I متغیر مصنوعی در پایه باشد، مساله اصلی اگر شدنی باشد، حتما تباهیده است. ($R = 0$)

دوگان:

قضیه ضعیف دوگانی:

اگر مساله اولیه Min باشد و دوگان Max، مقدار تابع هدف هر نقطه شدنی مساله اولیه بزرگتر مساوی مقدار تابع هدف هر نقطه شدنی دوگان است.

اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان نامتناهی باشد دیگری حتما نشدنی است.
اگر یکی نشدنی باشد، دیگری یا نشدنی است یا دارای جواب نامتناهی است.

❋ اگر یکی از مسائل دوگان یا اولیه، چندگانه باشد، دیگری حتما تباهیده است اما عکس این حالت برقرار نیست.

سیمپلکس دوگان:

$b_i \geq 0 \Leftarrow$ جدول بهینه و شدنی

$Y_r > 0, b_i < 0 \Leftarrow$ مساله اولیه نشدنی و دوگان جواب نامتناهی

تست Min تضمین می کند { بهینگی حفظ شود. / مقدار تابع هدف بهتر نشود.

تست Min بر روی عناصر منفی سطر محوری صورت می گیرد.

قیمت سایه (w_i): میزان تغییرات مقدار تابع بهینه به ازاء یک واحد افزایش b_i می باشد. (یعنی: $Z \to Z + w_i \Leftarrow b_i \to b_i + 1$)

※ محصول در شرایطی صرفه اقتصادی برای تولید را دارد که بتواند وارد پایه شود.

تحلیل حساسیت:

تغییر در ضرایب تابع هدف (C)

۱- غیرپایه ای ← تنها $Z_k - C_k$ همان متغیر را حساب می کنیم... ($Z = C_B B^{-1} b$ ← تغییر نمی کند)

※ چنانچه از بهینگی خارج شود، با سیمپلکس مجددا حل می کنیم.

۲- پایه ای ← مقدار Z تغییر می کند و همه مجددا محاسبه می شوند...

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	0		○	○	○		○
x_5	0		↓+	↓+	↓+		↓+
z	1		○	○	○		○

$(C_{New} - C_{Old}) \times$

اختلاف ضریب جدید و قدیم را در سطر متغیر پایه که ضریبش تغییر کرده ضرب می کنیم و با سطر Z جمع کرده و نگاه می کنیم بهینگی تغییر می کند یا خیر.

تغییر در بردار سمت راست (b): $B^{-1}b'$ جدید را حساب کرده، اگر منفی شد، از سیمپلکس دوگان حل می کنیم و مقدار تابع هدف جدید $C_b B^{-1} b'$ خواهد بود.

کوچکترین عنصر مثبت بدست آمده از تقسیم $\frac{-RHS}{B^{-1} \text{ امین ستون } i} \leq \Delta b_i \leq$ بزرگترین عنصر منفی بدست آمده از تقسیم $\frac{-RHS}{B^{-1} \text{ امین ستون } i}$

تغییر در ضرایب (A): { ۱- غیر پایه ای ← باید $C_b B^{-1} a'_k - C_k$ مجددا محاسبه شود و شرط ورود آن بررسی شود.
۲- پایه ای ← B^{-1} عوضی می شود و همه چیز را باید دوباره حساب کرد.

افزودن متغیر جدید (x_n): $Z_n - C_n$ جدید را محاسبه کرده و اگر شرط ورود داشت، حل را ادامه می دهیم... Y جدید را با $B^{-1} a_n$ محاسبه می کنیم.

حذف متغیر: حذف متغیر غیرپایه ای اشکالی در مساله ایجاد نمی کند اما حذف متغیر پایه ای در حقیقت بازگشت به عقب است و با عملیات سطری صورت می پذیرد. (*جدول بهینه تر نمی شود.*)

افزودن محدودیت جدید: اگر نقطه بهینه صدق نکند، محدودیت جدید را به انتهای جدول اضافه کرده و با سیمپلکس دوگان حل می کنیم. (مساله ناموجه و نابهین می شود.) جدول جدید را باید یکه کرد.

گردآورنده: هادی جهانشاهی

حذف محدودیت:
۱- حذف محدودیتی که در نقطه بهین فعال نمی باشد (**S** در آن اکیدا مثبت است) بلامانع است.
۲- حذف محدودیت فعال در صورتی ممکن است که متغیر کمکی آن را وارد پایه کنیم و اکیدا مثبت شود و سپس محدودیت را حذف کنیم. (ممکن است بهینگی و شدنی بودن از بین برود.)

آشفته سازی:

در محل اشتراک بازه های λ دوگان دارای جواب بهینه چندگانه است.

$C \to C+\lambda C'$ → Min مقعر ، Max محدب

$b \to b+\lambda b'$ → Max مقعر ، Min محدب

قانون ۱۰۰%:

میزان افزایش / حداکثر میزان افزایش
یا
میزان کاهش / حداکثر میزان کاهش

تغییر همزمان C_j
- مجموع نسبتها کمتر از ۱ ← بهینگی حفظ می شود.
- مجموع نسبتها بیشتر از ۱ ← غیر بهینه شدن جدول (ممکن است)

تغییر همزمان b_j
- مجموع نسبتها کمتر از ۱ ← شدنی بودن برهم نمی خورد.
- مجموع نسبتها بیشتر از ۱ ← ممکن است شدنی بودن از بین برود.

❋ چنانچه **b** چنان تغییر کند که نقطه بهینه همچنان شدنی باشد ⇐ بهینگی تغییر نمی کند.
❋ بردار گرادیان تابع هدف چنان تغییر کند که مابین بردار گرادیان ضرایب باشد ← بهینگی تغییر نمی کند.

شرایط (K.K.T):

x^* بهینه است اگر و فقط اگر:

$$\begin{cases} ۱- Ax^* \le b \\ ۲- w^*A \ge C \\ ۳- \underbrace{w^*(b-Ax^*)=0 \;,\; (w^*A-C)x^*=0}_{w^*b=Cx^*} \end{cases}$$

شرط مکمل زائد

گرافها:

❋ در یک گراف ممکن است درخت مینیمم فراگیر یکتا نباشد اما تمام درختهای **Min** فراگیر، مجموع ظرفیت یالهایشان برابر است.
❋ کمترین ظرفیت برش = مجموع بیشترین جریان
❋ **CPM** مدلهای مشخص و **PERT** و **GERT** احتمالی هستند.

گردآورنده: هادی جهانشاهی

حمل و نقل:

$$MinZ=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}C_{ij}x_{ij}$$

$\{u_i\}$ $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=s_i$

$\{v_j\}$ $\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=d_j$

$x_{ij}\geq 0$

دوگان ←

$$MaxY=\sum_{i=1}^{m}s_iu_i+\sum_{j=1}^{n}d_jv_j$$

$u_i+v_j\leq C_{ij}$

$u_i,v_j:Free$

متوازن $\sum_{i}^{m}s_i=\sum_{j}^{n}d_j=A$

❊ تعداد محدودیتهای زائد همواره یکی و فقط یکی است.($(m+n-1)$ متغیر پایه ای داریم.)

❊ $(m\times n)$ متغیر ❊ $(m+n)$ محدودیت

❊ ماتریس ضرایب $(2\times m\times n)$ عدد یک و $\{(m+n)\times m\times n\}-\{2\times m\times n\}$ عدد صفر دارد.

❊ در حالت توازن ← $0\leq x_{ij}\leq Min\{s_i,d_j\}$

❊ حمل و نقل متوازن همواره شدنی ست و یک جواب شدنی آن بدین صورت است: $x_{ij}=\frac{s_i\times d_j}{A}$

❊ چنانچه عرضه و تقاضا عدد صحیح باشند، هر جواب پایه ای حمل و نقل عدد صحیح خواهد بود.

❊ اگر بخواهیم حمل و نقل را با سیمپلکس حل کنیم، نیاز به $(m+n)$ متغیر مصنوعی داریم. (به تعداد محدودیتها)

❊ اگر عرضه و تقاضا برابر نباشند، با افزودن ستونی مجازی با هزینه صفر مساله را حل می کنیم.

❊ چنانچه بخواهیم در انباری چیزی باقی نماند، باید هزینه انبارداری آن را **M** قرار دهیم.

❊ هرگاه جمع زیرمجموعه ای از عرضه ها با جمع زیرمجموعه ای از تقاضاها برابر باشد، مدل تباهیده است.

- **روش تخمین وگل:**

				جریمه
۱۰	۰	۲۰	۱۱	۱۰ − ۰ = ۱۰
۱۲	۷	۹	۲۰	۹ − ۷ = ۲
(۰)	۴	۱۶	۱۸	۱۴ − ۰ = (۱۴) Max
جریمه: ۱۰ − ۰ = ۱۰	۷ − ۰ = ۷	۱۶ − ۹ = ۷	۱۸ − ۱۱ = ۷	

تخصیص به Min ردیف

⇐

۱۰	۰	۲۰	۱۱	۱۵
۱۲	۷	۹	۲۰	۲۵
۰ (۵)	۴	۱۶	۱۸	۵
۵	۱۵	۱۵	۱۰	

- **روش تخمین راسل:**

$$\Delta=C_{ij}-u_i-v_j$$

C_{ij}: هزینه عنصر **ij**

u_i: Max هزینه ردیف **i**

v_j: Max هزینه ستون **j**

❊ **روش شمالغربی** بسیار ساده است و البته بسیار دور از جواب.

❊ در **روش تخمین وگل** حداقل هزینه اضافی که به واسطه عدم تخصیص به خانه ای با کمترین هزینه در سطر یا ستون متقبل می شویم را در نظر می گیریم.

❊ **روش تخمین راسل** شبیه به قدم اول تکرارهای سیمپلکس حمل و نقل است و لذا برنامه کامپیوتری را ساده می سازد.

- **روش توزیع تعدیل شده یا روش مضارب (MODI)**

$\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دلخواه می دهیم و $\mathbf{Z_{ij}-C_{ij}}$ را بر طبق $\mathbf{Z_{ij}-C_{ij}=u_i+v_j-C_{ij}}$ بدست می آوریم. اگر (مثبت) شد، چون **Min** است، بنابراین واردشونده خواهد بود.

※ $\mathbf{u_i+v_j=C_{ij}}$ برای پایه ای ها

- **روش پله سنگ:**

از خانه خالی (متغیر غیر پایه ای) شروع کرده و با متغیرهای پایه ای یک دور بدست می آوریم. به متغیر شروع شونده علامت (منفی) و یک در میان (مثبت) و (منفی) می دهیم. چنانچه حاصل نهایی (مثبت) شد، متغیر شروع شونده، وارد خواهد شد.

۱۰	$10-\theta$	θ	۲۰
	$5+\theta$	$15-\theta$	۲۰
۱۰	۱۵	۱۵	

بر فرض وارد شونده است

※ برای بدست آوردن جدول بعد، به متغیر وارد شونده، مقدار θ می دهیم و به گونه ای θ را کم و زیاد می کنیم که عرضه و تقاضا در تعادل باقی بمانند.

پس از آن می بینیم با افزایش θ کدامیک زودتر صفر خواهند شد. (وارد شونده خواهند بود) $\Leftarrow \begin{cases}10-\theta=0\\15-\theta=0\end{cases} \rightarrow \mathrm{Min}\theta=10$

برای به دست آوردن جدول بعد به همان میزان θ را افزایش می دهیم و جدول بعد حاصل می شود.

۱۰	۰	۱۰	۲۰
۰	$5+10$	$15-10$	۲۰
۱۰	۱۵	۱۵	

※ اگر دو متغیر با هم صفر شوند و اختیار به وجود آید، در مرحله بعد **تباهیدگی** داریم.

※ مساله حمل و نقل دارای جواب و ناحیه نامتناهی **نیست** زیرا هیچ متغیر غیرپایه ای نیست که ستون ضرایبش تماما منفی یا صفر شود.

※ چنانچه برای متغیر غیرپایه ای $\mathbf{Z_{ij}-C_{ij}=0}$ شود، آن را وارد پایه می کنیم و دنبال جواب بهینه چندگانه می گردیم و اگر تست **Min** هم مخالف صفر شد، مساله **جواب چندگانه** دارد.

✓ **حمل و نقل با عرضه و تقاضای محدود:**

			۲۰
			$20\le S_2\le 30$
۱۰	۱۵	۱۵	

Changed to

			۰	۲۰
			M	۲۰
			۰	$30-20=10$
۱۰	۱۵	۱۵	$d_4=10$	

حد پایین

تفاوت بین حد پایین و بالا

هزینه مربوط به سطر حد پایین $\mathbf{M}$ می شود تا حداقل عرضه این مبدا برآورده شود.

مقصد مجازی

※ چنانچه به تمام عناصر سطر یا ستون ماتریس هزینه مقدار ثابت $\mathbf{k}$ اضافه کنیم، نقطه بهینه تغییر نمی کند اما تابع هدف به اندازه $\mathbf{d_j\times k}$ یا $\mathbf{s_i\times k}$ تغییر می کند.

※ چنانچه به تمام هزینه ها مقدار ثابت $\mathbf{k}$ اضافه کنیم، نقطه بهینه تغییر نمی کند اما تابع هدف به اندازه $\mathbf{d\times k}$ اضافه می شود:

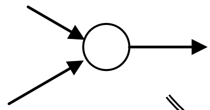
$$\mathbf{d=\sum_i s_i=\sum_j d_j}$$

※ برای آنکه یک مقدار پایه ای بهینه باقی بماند، باید از روش چرخشی مقادیر را بدست آورد و منفی باید باشد تا بهینگی حفظ شود.

حمل و نقل مرکب: $(m \times n)$

m

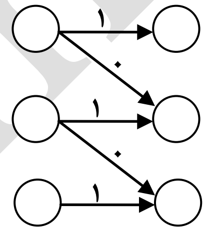
n



$(m+n)(m+n) =$ تعداد متغیرها

تخصیص (حالت خاص حمل و نقل): $(m \times m)$

$m! =$ کل حالات تخصیص



$$MinZ = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_{ij}$$

$\{u_i\}$ $\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$

$\{v_j\}$ $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$

$x_{ij} = 0 \text{ or } 1$

اگر $x_{ij} \geq 0$ شود $\Leftarrow$ خطی می شود.

$s_i = d_j = 1$

دوگان $\longrightarrow$

$$MaxY = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{m} v_j$$

$$u_i + v_j \leq C_{ij}$$

$$u_i, v_j : Free$$

❊ تعداد محدودیتها $= 2m$

❊ تعداد یک ها در ماتریس ضرایب $= 2m^2$

❊ تعداد صفرها در ماتریس ضرایب $= (m+m)(m \times m) - 2mm = 2m^2(m-1)$

❊ تعداد متغیرهای پایه ای $= 2m-1 \quad \leftarrow \quad m$ تا همواره یک و $m-1$ تای آن همواره صفر.

❊ مساله تخصیص **همواره تباهیده** است و با حمل و نقل حل نمی شود.

❊ مدل تخصیص متوازن همواره شدنی است.

❊ تعداد متغیرهای تصمیم $= m^2$

الگوریتم مجارستانی:

۱. کوچکترین عنصر هر سطر یا ستون را از تمام عناصر آن سطر یا ستون کم می کنیم.

۲. با کمترین تعداد خط، صفرهای جدول را می پوشانیم. اگر تعداد خطوط پوششی برابر m شد، جدول بهینه است.

۳. در غیراین صورت، کوچکترین عددی را که روی آن خط کشیده نشده را از اعدادی که روی آن خط کشیده نشده کم و به محل تقاطع خطوط مرحله ۲ اضافه می کنیم و مجددا صفرهای جدید را با خط پوششی می پوشانیم تا به m خط برسیم.

- مراحل ۲ و ۳ را تا رسیدن به m خط ادامه می دهیم.

❊ اگر بخواهیم فردی به شغلی تخصیص پیدا نکند، هزینه آن را M قرار می دهیم.

❊ شبکه ای با m کمان و n گره، دارای n محدودیت است.

❊ کمان ورودی با علامت (منفی) و کمان خروجی از گره با علامت (مثبت) خواهد بود.